Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 1 (Individual)

香港数学竞赛 (1999 – 2000)

决赛项目 1 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

(i) 设 $[x]$ 表示小数 x 的整数部份。已知 $[3.126]+\left[3.126+\frac{1}{8}\right]+\left[3.126+\frac{2}{8}\right]+\cdots+\left[3.126+\frac{7}{8}\right]=P$，求 P 的值。

Let $[x]$ represents the integral part of the decimal number x. Given that $[3.126]+\left[3.126+\frac{1}{8}\right]+\left[3.126+\frac{2}{8}\right]+\cdots+\left[3.126+\frac{7}{8}\right]=P$, find the value of P.

$P =$

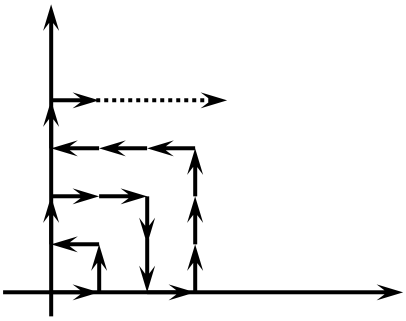
(ii) 设 $a+b+c=0$。已知 $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=P-3Q$，求 Q 的值。

Let $a+b+c=0$. Given that $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=P-3Q$, find the value of Q.

$Q =$

(iii) 在直角坐标平面的第一象限中，把坐标为整数的点按以下方法编号：

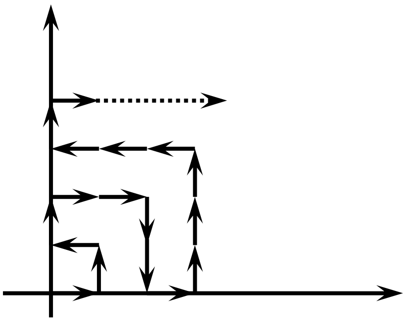
点 (0, 0) 为第 1 号，
点 (1, 0) 为第 2 号，
点 (1, 1) 为第 3 号，
点 (0, 1) 为第 4 号，
点 (0, 2) 为第 5 号，
点 (1, 2) 为第 6 号，
点 (2, 2) 为第 7 号，
点 (2, 1) 为第 8 号，
…………………



已知 $(Q-1, Q)$ 点为第 R 号，求 R 的值。

In the first quadrant of the rectangular co-ordinate plane, all integral points are numbered as follows,

point (0, 0) is numbered as 1,
point (1, 0) is numbered as 2,
point (1, 1) is numbered as 3,
point (0, 1) is numbered as 4,
point (0, 2) is numbered as 5,
point (1, 2) is numbered as 6,
point (2, 2) is numbered as 7,
point (2, 1) is numbered as 8,
……………………………



Given that point $(Q-1, Q)$ is numbered as R, find the value of R.

$R =$

(iv) 当 $x+y=4$ 时，$3x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{R}{S}$，求 S 的值。

When $x+y=4$, the minimum value of $3x^2+y^2$ is $\frac{R}{S}$, find the value of S.

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)
Final Event 2 (Individual)
香港数学竞赛 (1999 – 2000)
决赛项目 2 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

(i) 如果 $\log_2(\log_4 P)=\log_4(\log_2 P)$ 及 $P\neq 1$，求 P 的值。

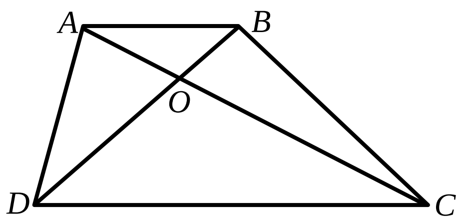
If $\log_2(\log_4 P)=\log_4(\log_2 P)$ and $P\neq 1$, find the value of P.

$P=$

(ii) 在梯形 $ABCD$ 中，$AB // DC$。AC 和 BD 相交于 O。三角形 AOB 和 COD 的面积分别为 P 和 25。已知梯形的面积为 Q，求 Q 的值。

In the trapezium $ABCD$, $AB // DC$. AC and BD intersect at O. The areas of triangles AOB and COD are P and 25 respectively. Given that the area of the trapezium is Q, find the value of Q.

$Q=$



(iii) 当 1999^Q 被 7 除时，余数为 R。求 R 的值。

When 1999^Q is divided by 7, the remainder is R. Find the value of R.

$R=$

(iv) 如果 $111111111111-222222=(R+S)^2$，求 S 的值。

If $111111111111-222222=(R+S)^2$, find the value of S.

$S=$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 3 (Individual)

香港数学竞赛 (1999 – 2000)

决赛项目 3 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

(i) 已知 $1+2+3+\cdots+1997+1998+1999+1998+1997+\cdots+3+2+1$ 的个位数是 P，求 P 的值。

Given that the unit digit of $1+2+3+\cdots+1997+1998+1999+1998+1997+\cdots+3+2+1$ is P, find the value of P.

$P =$

(ii) 已知 $x+\dfrac{1}{x}=P$。如果 $x^6+\dfrac{1}{x^6}=Q$，求 Q 的值。

Given that $x+\dfrac{1}{x}=P$. If $x^6+\dfrac{1}{x^6}=Q$, find the value of Q.

$Q =$

(iii) 已知 $\dfrac{Q}{\sqrt{Q}+\sqrt{2Q}}+\dfrac{Q}{\sqrt{2Q}+\sqrt{3Q}}+\cdots+\dfrac{Q}{\sqrt{1998Q}+\sqrt{1999Q}}=\dfrac{R}{\sqrt{Q}+\sqrt{1999Q}}$，求 R 的值。

Given that
$\dfrac{Q}{\sqrt{Q}+\sqrt{2Q}}+\dfrac{Q}{\sqrt{2Q}+\sqrt{3Q}}+\cdots+\dfrac{Q}{\sqrt{1998Q}+\sqrt{1999Q}}=\dfrac{R}{\sqrt{Q}+\sqrt{1999Q}}$, find the value of R.

$R =$

(iv) 设 $f(0)=0$； $f(n)=f(n-1)+3$ 当 $n=1$、2、3、4、…。如果 $2f(S)=R$，求 S 的值。

Let $f(0)=0$; $f(n)=f(n-1)+3$ when $n=1, 2, 3, 4, \ldots$. If $2f(S)=R$, find the value of S.

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)
Final Event 4 (Individual)
香港数学竞赛 (1999 – 2000)
决赛项目 4 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

(i) 假设 $a+\frac{1}{a+1}=b-\frac{1}{b-1}-2$， 其中 $a\neq -1$，$b\neq 1$ 和 $a-b+2\neq 0$。已知 $ab-a+b=P$，求 P 的值。

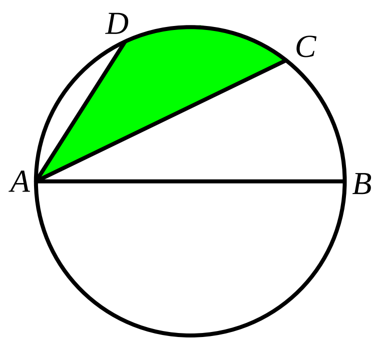
Suppose $a+\frac{1}{a+1}=b-\frac{1}{b-1}-2$, where $a\neq -1$, $b\neq 1$, and $a-b+2\neq 0$. Given that $ab-a+b=P$, find the value of P.

$P=$

(ii) 在下图中，AB 为圆的直径。C 和 D 把弧 AB 分为三等份。斜线面积为 P。若圆的面积为 Q，求 Q 的值。

In the following figure, AB is a diameter of the circle. C and D divide the arc AB into three equal parts. The shaded area is P. If the area of the circle is Q, find the value of Q.

$Q=$



(iii) 已知两个 Q 位数 1111…11 和 9999…99 的乘积中有 R 个数字是奇数，求 R 的值。

Given that there are R odd numbers in the digits of the product of the two Q-digit numbers 1111…11 and 9999…99, find the value of R.

$R=$

(iv) 设 a_1、a_2、…、a_R 为正整数，其中 $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_{R-1} < a_R$。已知这 R 个正整数的和为 90 及 a_1- 的最大值为 S，求 S 的值。

Let $a_1, a_2, \dots, a_R$ be positive integers such that $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_{R-1} < a_R$. Given that the sum of these R integers is 90 and the maximum value of a_1 is S, find the value of S.

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)
Final Event 5 (Individual)
香港数学竞赛 (1999 – 2000)
决赛项目 5 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

(i) 如果 $\left(\dfrac{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots+1999\times3998\times7996}{1^3+2^3+3^3+\cdots+1999^3}\right)^{\frac{1}{3}}=P$，求 P 的值。

If $\left(\dfrac{1\times2\times4+2\times4\times8+3\times6\times12+\cdots+1999\times3998\times7996}{1^3+2^3+3^3+\cdots+1999^3}\right)^{\frac{1}{3}}=P$, find the value of P.

$P=$

(ii) 如果 $(x-P)(x-2Q)-1=0$ 有两个整数根，求 Q 的值。

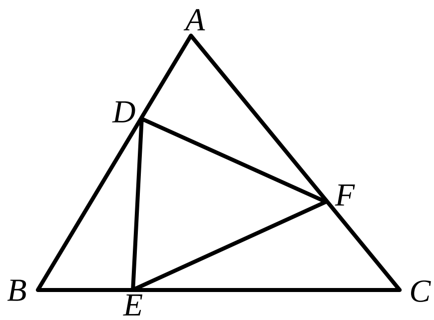
If $(x-P)(x-2Q)-1=0$ has two integral roots , find the value of Q.

$Q=$

(iii) 已知 ΔABC 的面积为 3Q；D、E 和 F 分别为 AB、BC 和 CA 上的点使得 $AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$，$CF=\frac{1}{3}CA$。如果 ΔDEF 的面积为 R，求 R 的值。

Given that the area of the ΔABC is $3Q$; D, E and F are the points on AB, BC and CA respectively such that $AD=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, $CF=\frac{1}{3}CA$. If the area of ΔDEF is R, find the value of R.

$R=$



(iv) 已知 $(Rx^2 - x + 1)^{1999} \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{3998} x^{3998}$。

设 $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3997}$，求 S 的值。

Given that $(Rx^2 - x + 1)^{1999} \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{3998} x^{3998}$. If $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3997}$, find the value of S.

$S =$